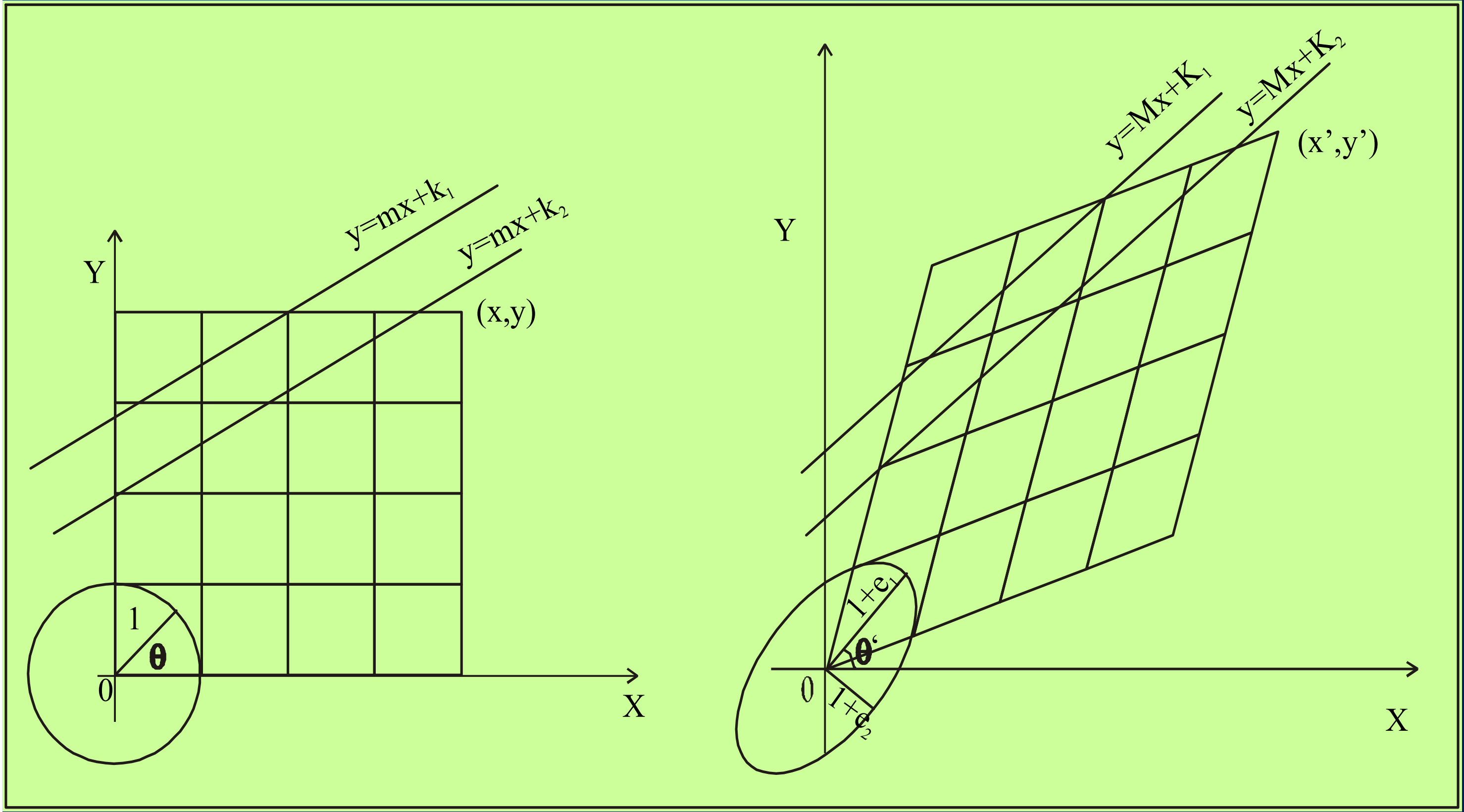
DEFORMASYON ELİPSİ



Şekil 10:Deformasyon elipsi
(Ramsay ve Huber, 1987)

Homojen deformasyonun önemli bir özelliği de merkezi orijinde bulunan bir birim dairenin lineer koordinat dönüşüm denklemleri ile deformasyonu sonucu ortaya çıkar (Şekil 10a ve b).

denklemi $x^2+y^2=1$ olan bir birim daire

(1.8) nolu denklem ile deforme edildiğinde

$$(c^2+d^2)x_1^2-2(ac+bd)x_1y_1+(a^2+b^2)y_1^2=(ad-bc)^2$$

olur, buda bir elips denklemidir.

Sonuç olarak daire deforme olduğunda, bir elipse dönüşür.

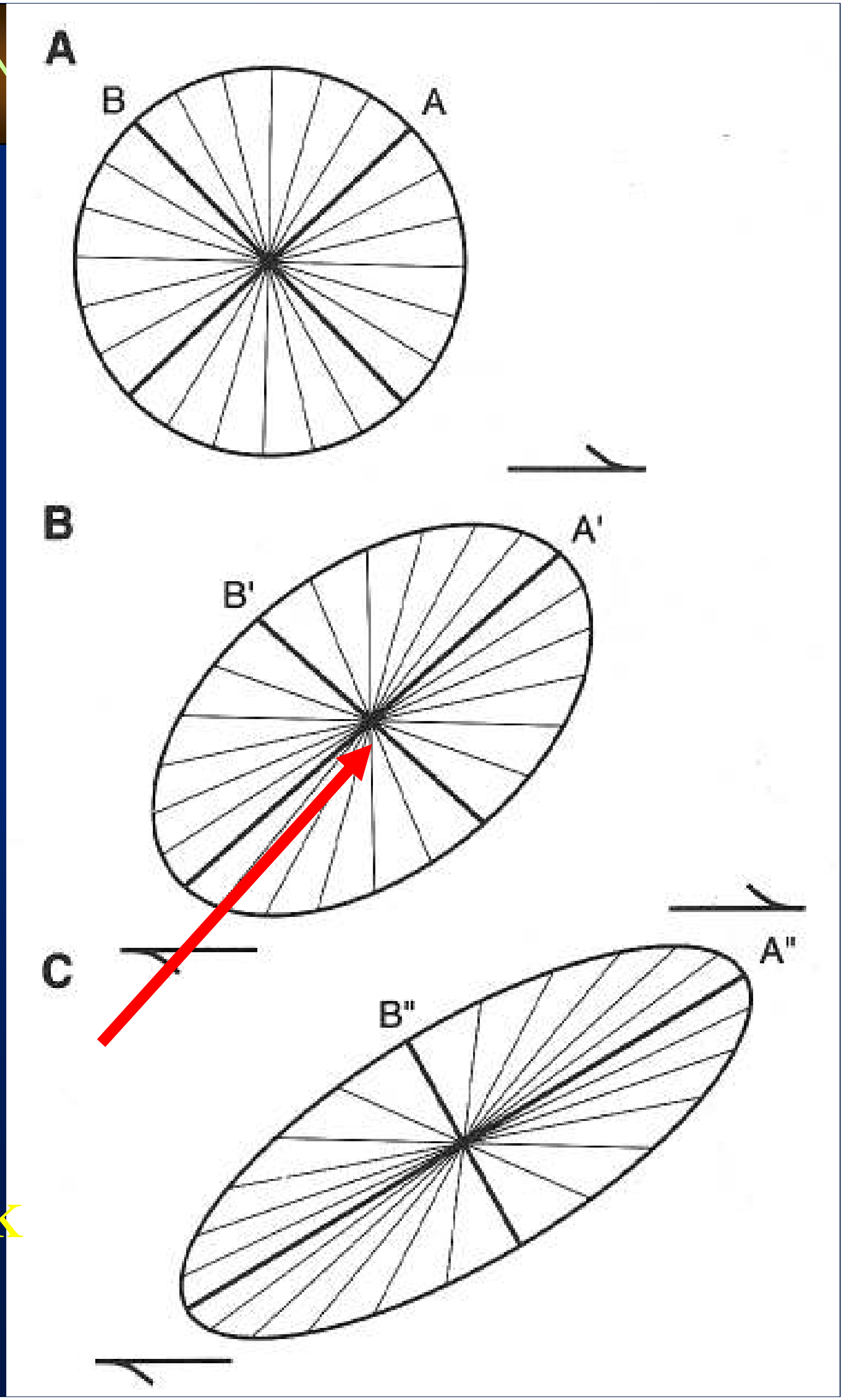
Bu elipse **deformasyon elipsi** denir.

Deformasyon elipsi

Şekildeki A ve B A'' ve B'' konumunu alır

Başlangıçta daire içinde bulunan doğrulardan hiçbiri A kadar uzamayacak ve B kadar kısalmayacaktır

A & B çizgileri aynı zamanda açısal kaymanın olmadığı ($\Psi = 0$) doğrulardır. Deformasyondan öncede sonrada birbirine dik olarak kalırlar



DEFORMASYON

Yrd.Doç.Dr.Yaşar EREN

simpleshear_ellispoid2.mov

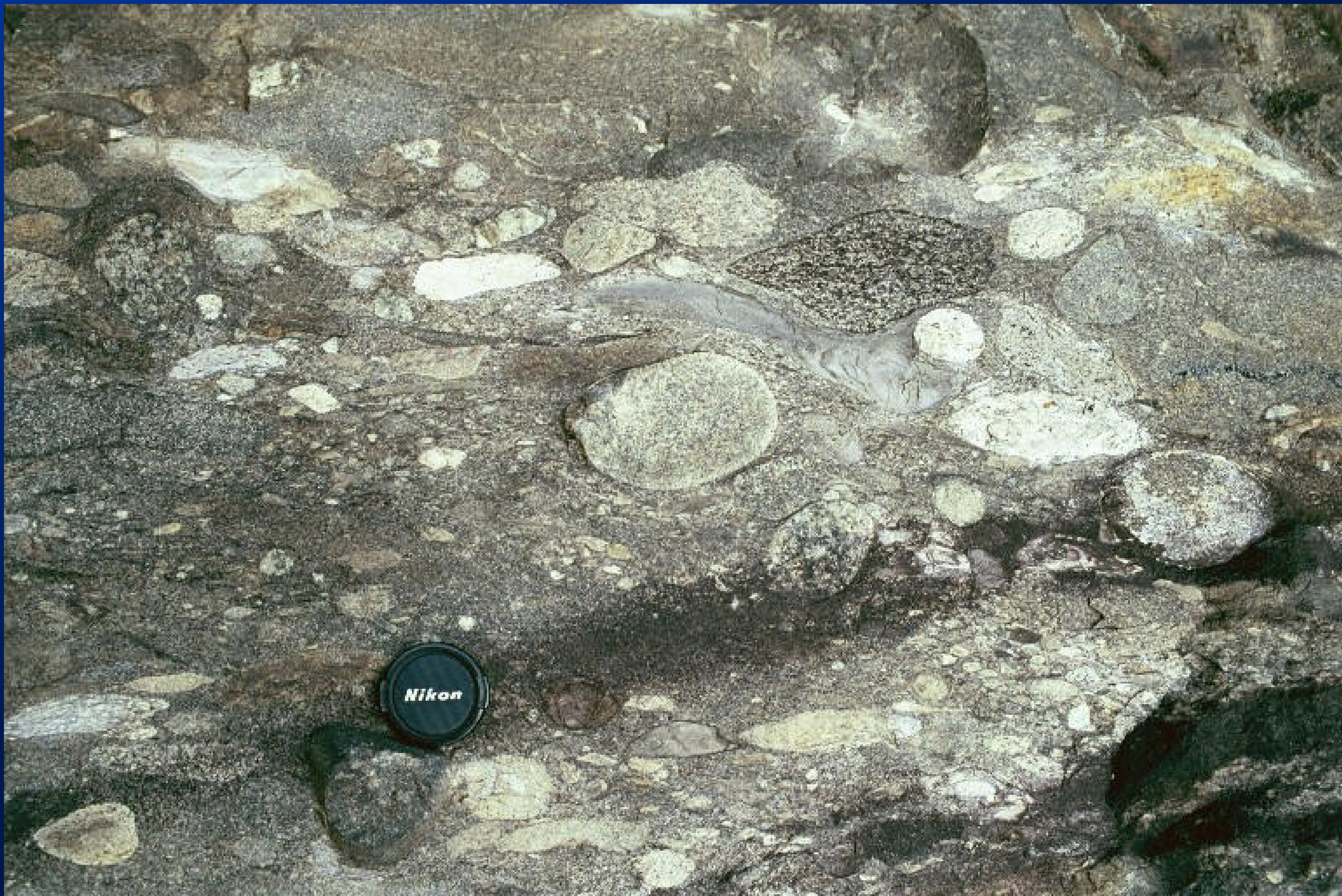
strain_ellipsoid.mov

DEFORMASYON

FSEpure.mov

FSEsimple.mov

Deforme çakıltaşı



Deforma çakıltaşı

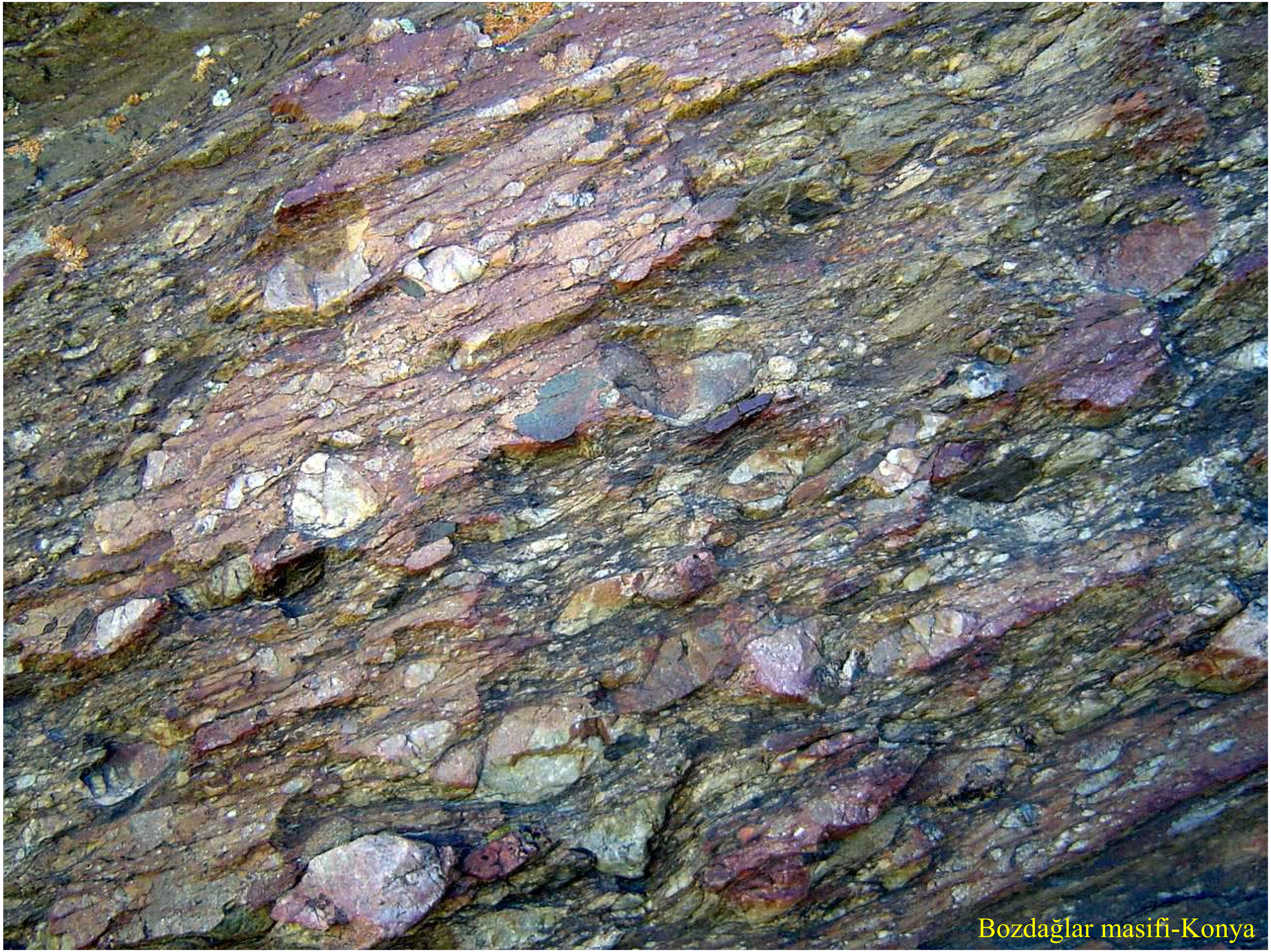

Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya

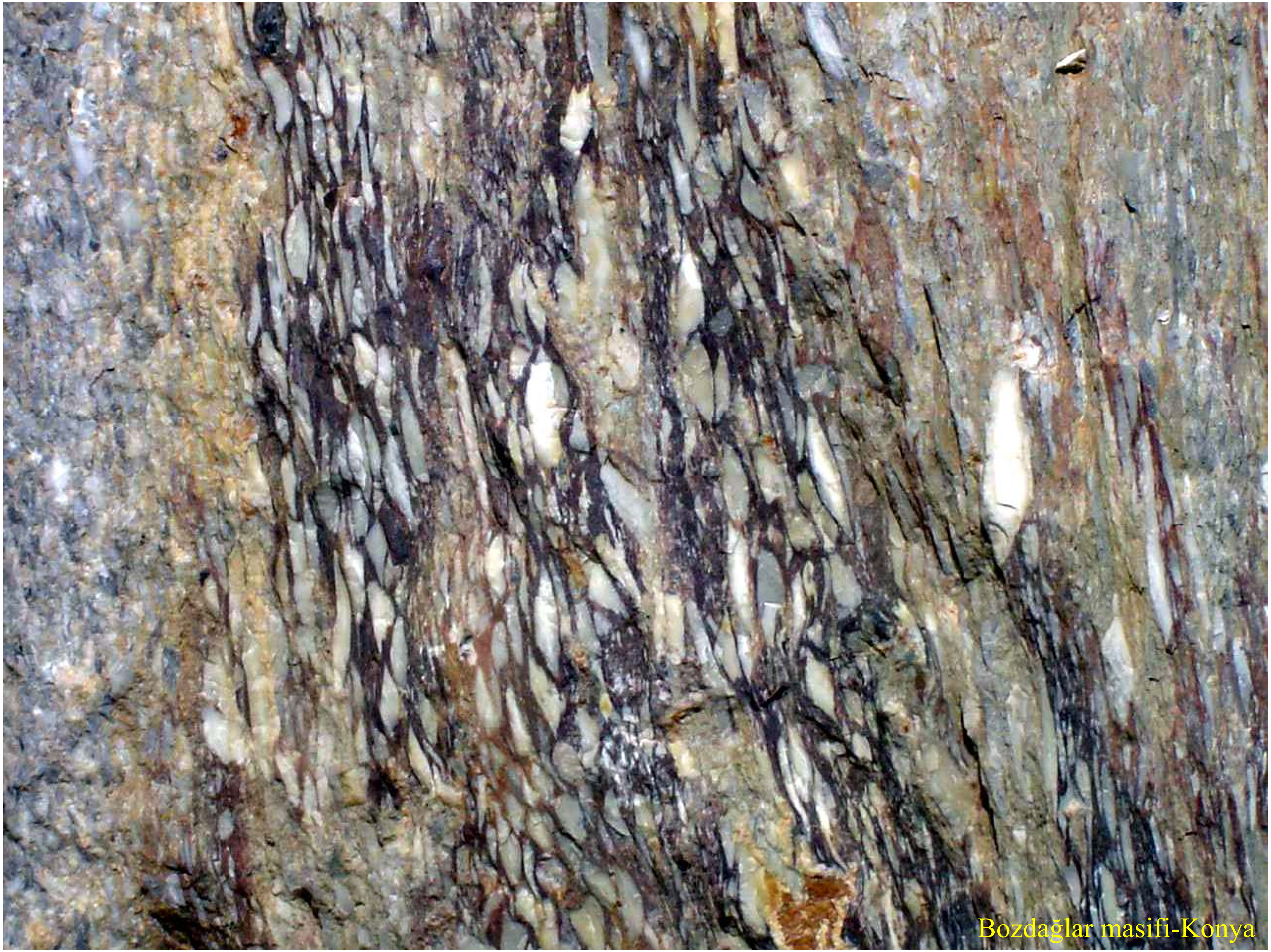

Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya

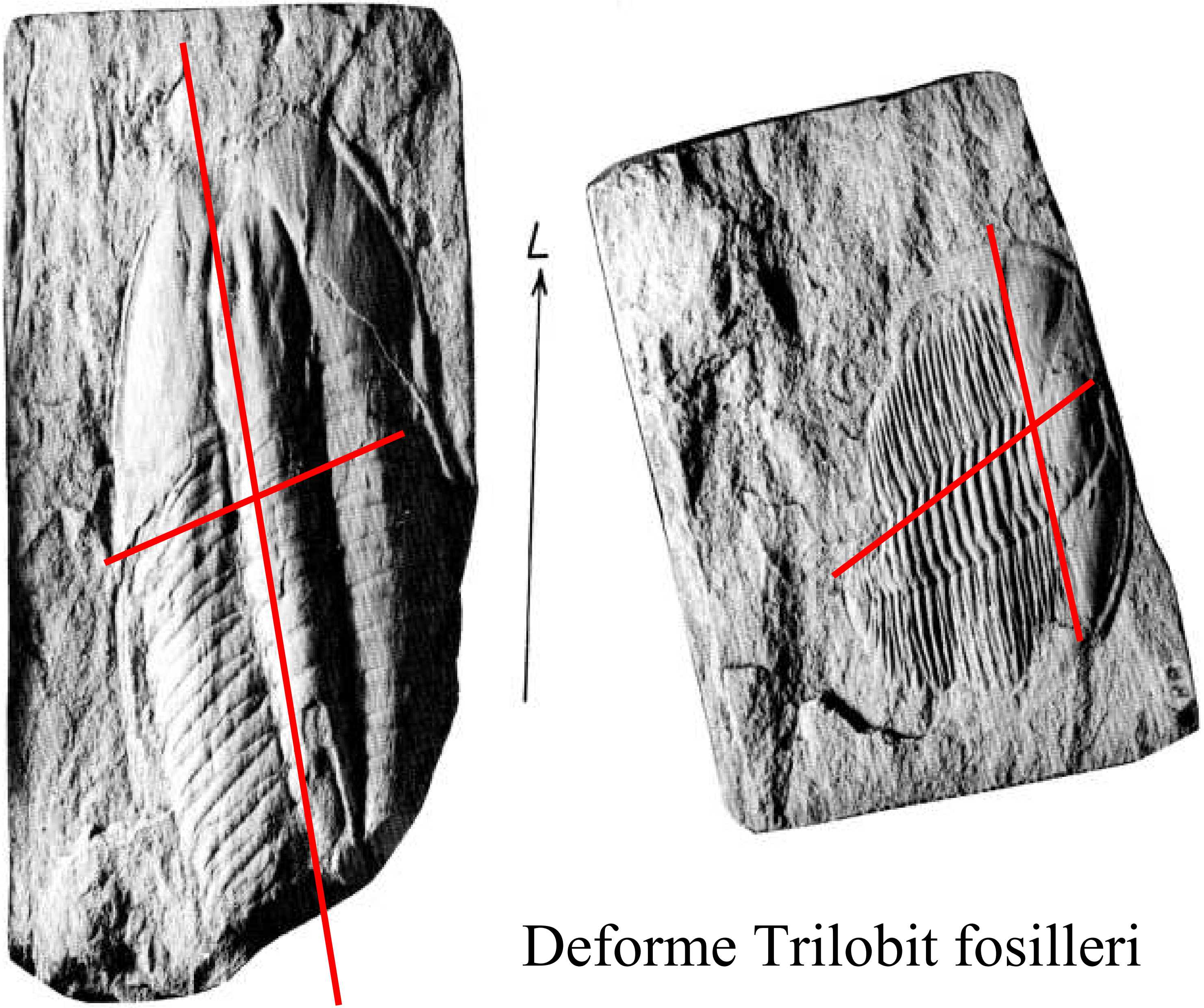

Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya



Deforme Trilobit fosilleri

- Bu elipsin uzun ve kısa eksenleri en büyük ve en küçük boy değişiminin konumunu verecektir ve bunlar

- $(1+e_1)^2=\lambda_1 \qquad (1+e_2)_2=\lambda_2$
- $\lambda_1 \geq \lambda_2$

- şeklinde gösterilebilir.
- Elipsin simetri özelliklerinden asal deformasyon ekseniyle α açısı yapan herhangibir yöndeki deformasyon özellikleri, bu eksenle -α açısı yapan simetriği ile aynıdır. Yani uzama ve kayma deformasyonu aynıdır fakat ters işaretlidir.
- Deformasyon elipsinin kullanımında yerdeğiştirme ve içsel deformasyonun büyüklüğü ile ilgili bir sınır yoktur. Sınırlama sadece incelenen alandaki homojenite ile ilişkilidir. Kavram hem büyük hem küçük yani sürekli akma ve ufak elastik deformasyonlar içinde geçerlidir.

Eğer genel ötelenme denklemi (1.9) orijine yerleştirilmiş bir elipse uygulanırsa

$$lx-2mxy+ny=1$$

olur.

Sonuçta bu elips diğer bir elipse dönüşecektir. Bunun önemi şudur.

Düzlemsel deformasyonlarda birbirini üstelemiş iki deformasyon geometrik olarak tek bir elips ile gösterilir.

Karşıt elips (The reciprocal strain ellipse) kavramı

- Deformasyon elipsi referansı başlangıçta orijinde bulunan bir daire olan (deforme olmamış durumda) Langrengiyen bir kavramdır. Aynı şekilde deforme olmuş cisimlerdeki bir daireyi alıp onun deforme olmadığı andaki durumunu da inceleyebiliriz.
- formülü $x_1^2+y_1^2=1$ olan bir daireyi alıp ve bunu (1.8) nolu formülle deforme edersek
  - $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$ bu da
  - $(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2=1$ olur,

- bu orijinde bulunan bir elipsin denklemidir. Bu elipse karşıt elips denir.

Deformasyonun asal eksenleri

- Deformasyonla, başlangıçta birbirine dik olan iki çizgi arasındaki açı değişir.
- Bununla beraber deformasyondan önce birbirine dik olan iki doğru vardır ki, bunlar deformasyondan sonrada birbirlerine dik kalırlar.
- Başlangıçta orijinde dik olarak yer alan, bir çizginin denklemi y=mx ise, diğer dik doğrunun denklemi y= -x/m dir. Deformasyondan sonra bunun eğimi

$$\frac{mc-d}{ma-b}$$

Eğer m ve - 1/m ile eğimleri verilen birbirine dik iki doğru, deformasyondan sonrada dik kalırsa, eğimlerinin ürünü (-1) olur.

$$\frac{(md+c)(mc-d)}{(mb+a)(ma-b)} = -1$$

m^2+m

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{ab+cd} - 1 = 0$$

- ab+cd nin 0 olmadığı düşünülürse bu eşitlik reel bir eşitliktir, dolayısıyla
- deformasyondan önce birbirine dik iki doğru deformasyondan sonra da dik kalacaktır.
- m ve -1/m eğimli doğruların başlangıçtaki yönelimi deformasyonun asal eksenleri olarak bilinir.
- Deforme durumda bunlar maksimum ve minimum uzama yönlerine karşılık gelir.
- Genellikle bunların deformasyondan önceki ve sonraki yönelimleri birbirine parallel değildir. Bu durumda deformasyon dönmelidir. Bununla birlikte aynı ise deformasyon dönmesizdir.

- Dönmesiz deformasyon için, eğim deformasyon öncesi ve sonrası aynıdır.

$$\frac{md+c}{mb+a}=m$$

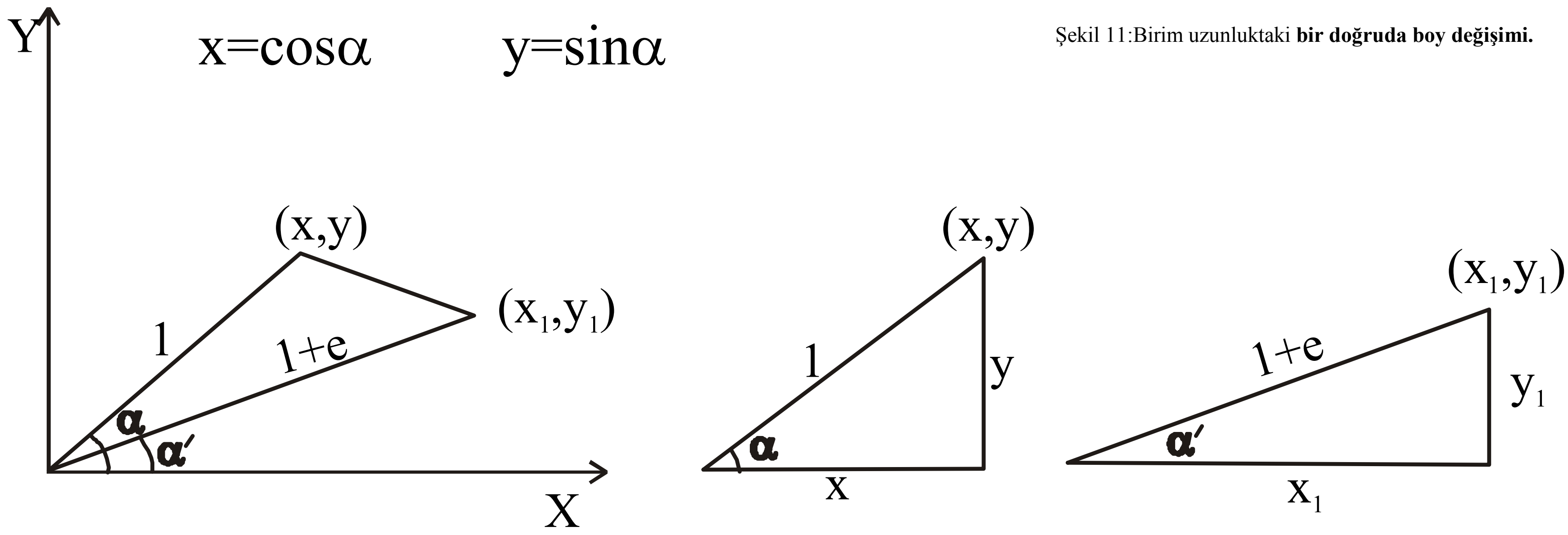
- $m^2 b+m(a-d)-c=0$
- $m^2c+m(a-d)-b=0$

- Buna göre dönmesiz deformasyonlarda

$$\frac{mc-d}{ma-b}=\frac{-1}{m}$$

- b=c dir.

1.4.5. Başlangıçta x-ekseniyle α açısı yapan bir doğruda boy değişimi



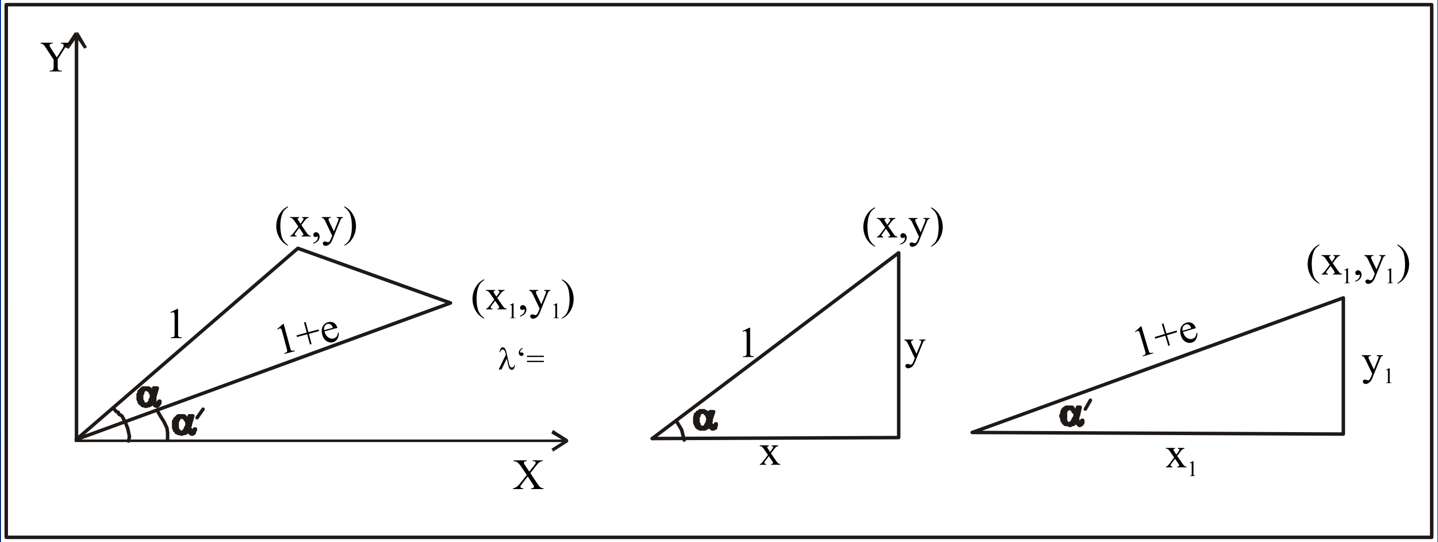
Şekil 11:Birim uzunluktaki **bir doğruda boy değişimi.**

(0,0) ve (x,y) koordinatlarındaki doğru x-ekseniyle α açısı yapmaktadır. Bu doğru deformasyondan sonra (x_1,y_1) konumun alacaktır ve x-ekseniyle α' açısı yapacaktır (Şekil 11). Bu birim doğrunun uzunluğu ise 1+e olacaktır.

- Pisagor teoreminden
  - $x=\cos\alpha$ $y=\sin\alpha$ olur.
- Bunu (1.8)-nolu denklemle deforme edersek
- $x_1=a\cos\alpha + b\sin\alpha$

  $y_1=c\cos\alpha + d\sin\alpha$ olur.
- Yine pisagor teoreminden
- $(1+e)^2=x_1^2+y_1^2=(a\cos\alpha + b\sin\alpha)^2 + (c\cos\alpha + d\sin\alpha)^2$ $\Rightarrow(\cos^2\alpha=1/2\ (1+\cos2\alpha)$, $\sin^2\alpha=1/2\ (1-\cos2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha=1/2\sin2\alpha)$ ve $\lambda=(1+e)^2$ olduğundan
- $\lambda=1/2\ (a^2-b^2+c^2-d^2)\cos2\alpha + (ab+cd)\sin2\alpha +1/2\ (a^2+b^2+c^2+d^2)$ (1.12)
- olur.

1.4.6. x-ekseniyle α‘ açısı yapan herhangibir çizgideki boy değişimi



- Yukarıdaki şekilden
  - $\cos\alpha' = x_1/1+e$ $\sin\alpha' = y_1/1+e$
  - $x_1=(1+e)\cos\alpha'$ $y_1=(1+e)\sin\alpha'$
- Bunu yine (1.9)-nolu denklem ile deforme eder ve $x^2+y^2=1$ ilişkisini kullanıp sadeleştirirsek
- $\lambda' = \dfrac{1}{(ad-bc)^2} = (1/2(d^2+c^2+a^2-b^2)\cos2\alpha' - (ac+bd)\sin2\alpha' + 1/2\,(a^2+b^2+c^2+d^2))$
- (1.13)

1.4.8. Deformasyondan sonra deformasyon elipsinin asal eksenlerinin yönelimi (θ‘)

- (1.13)-nolu denklemi deformasyondan sonra herhangibir doğrunun λ‘ değerini vermektedir. Asal deformasyon eksenlerinin yönelimi maksimum ve minimum değerlerin bulunmasıyla elde edilebilir. Burada denklem α‘ ne göre differansiyeli alınıp 0’a eşitlenirse

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = 0 = \frac{1}{(ad-bc)^2}\left[(a^2+b^2-c^2-d^2)\sin 2\alpha - 2(ac+bd)\cos 2\alpha\right] \text{...........} buradan$$

$$\tan 2\theta' = \frac{2(ac+bd)}{a^2+b^2-c^2-d^2} \text{ ....(1.16)}$$

$$\tan 2\theta' = \frac{2(ac+bd)}{a^2+b^2-c^2-d^2}$$

- olur. θ‘ asal deformasyon eksenlerinin yönelimini vermektedir. 360^o de bu eşitliğin çözümü 2θ‘ için birbirinden 180^o ayrı 2 değer vermektedir. Bunlar birbiriyle 90^o lik açı yapan maksimum ve minimum asal deformasyon eksenlerini yönelimin vermektedir.

1.4.9. Asal deformasyon eksenleri olacak doğruların deformasyondan önceki konumları(θ)

- (1.12) nolu eşitliğin α'ya göre differansiyelini alıp 0'a eşitlersek maksimum ve minimum eksenlerin deformasyondan önceki konumunu buluruz
- - (a-b+c-d)sin2α + 2(ab+cd)cos2α buda

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = 0 =$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta \frac{2(ab+cd)}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$$

$$\tan 2\theta \frac{2(ab+cd)}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2} \quad (1.17)$$

1.4.10. Dönme açısının bulunması

- θ‘=θ ise deformasyon dönmesizdir (irrotational).
  θ‘≠θ ise deformasyon dönmelidir (rotational).
  ω=dönme açısı=θ‘-θ (1.18)

$$\tan 2w = \tan(2\theta' - 2\theta) = \frac{\tan 2\theta' - \tan 2\theta}{1 - \tan 2\theta' \tan 2\theta}$$

- tan2θ‘ ve tan2θ nın yukarıdaki değerlerini bunlarla yer değiştirirsek

$$\tan 2\omega = \frac{2\tan\omega}{1-\tan^2\omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tan\omega = \frac{c-b}{a+d} \qquad (1.19)$$

- Deformasyonlar genellikle dönmelidir. tan2θ ve tan2θ‘ formüllerinden görülebileceği gibi eğer
- c=b ise deformasyon dönmesizdir.

1.4.11.Deformasyon elipsinin asal eksenlerinin değerlerinin bulunması

- Deformasyon elipsinin asal eksenlerinin değerleri (1.17) ve (1.12) deki eşitliklerden elde edilir. Bilindiği gibi
- $(1+e_1)^2=\lambda_1$ $(1+e_2)_2=\lambda_2$
- $$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta \frac{2(ab+cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2}$$ $\sec 2\theta = 1+\tan^2 2\theta$
- $$\cos 2\theta = \frac{1}{(1+\tan^2 2\theta)^{1/2}} = \frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{\left[(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+4(ab+cd)^2\right]} \Rightarrow (1.20)$$ $\mathrm{cosec}^2\, 2\theta = 1+\cot^2 2\theta$

$$\sin 2\theta = \frac{\tan 2\theta}{(1+\tan^2 2\theta)^{1/2}} = \frac{2(ab+cd)}{\left[(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+4(ab+cd)^2\right]^{1/2}} \Rightarrow (1.21)$$

- (1.20) ve (1.21) ile gösterilen denklemleri λ denklemine yerleştirdiğimizde

$$\lambda_1,\lambda_2 = \frac{1}{2}\left\{a^2+b^2+c^2+d^2 \pm \left[(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2\right]^{1/2}\right\} (1.22)$$

1.4.12. Eliptisite

- Deformasyon elipsinin en uzun ve en kısa ekseninin birbirine olan oranıdır ve
- $R=(1+e_1)/(1+e_2)=(\lambda_1/\lambda_2)^{1/2}$ (1.23)
- şeklinde ifade edilebilir.


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


Bozdağlar masifi-Konya


?
Bozdağlar masifi-Konya

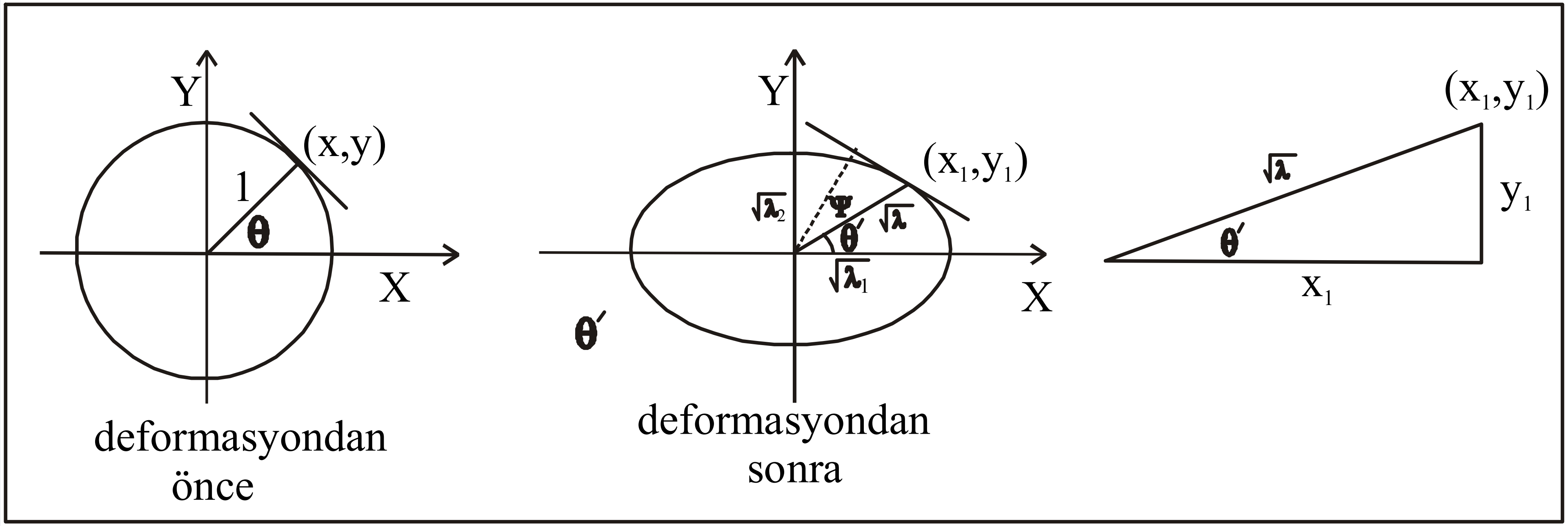
1.4.13. Alan değişimi (Dilatation)

- Dilatasyon olarak bilinir ve Δ ile gösterilir.
- Birim dairenin alanı=

  $\Delta=\pi r^2$ ve $r=1$ olduğundan,
- birim dairenin alanı
  - $\pi r^2 = \pi$ olur
- buradan da deformasyon elipsinin alanı=
  - $\pi(1+e1)(1+e2)$
  - $1+\Delta = \pi(1+e1)(1+e2)/\pi$ sadeleştirirsek
- $1+\Delta = (1+e_1)(1+e_2)$ (1.24) olur
- Koordinat transformasyon denklemleri kullanıldığında
  - $1+\Delta_A = ad-bc$ (1.25)
- olarak bulunur.

1.5. Çizgisel boy değişimi

- Deformasyondan sonra herhangibir doğrunun uzunluğu=1+e miktarı ile verilir (Şekil 1.12). Eğer ϕ deformasyondan önce herhangibir doğrunun (OP) x-ekseniyle yaptığı açı, ve ϕ‘ deformasyondan sonraki açı ise Pisagor teoreminden
- $(1+e)^2=\lambda= x_1{}^2+y_1{}^2$ $x_1=x(1+e_1)=\cos\phi\sqrt{\lambda}$ $y_1=\sin\phi\sqrt{\lambda}$
- Bu değerler yerine konduğunda
  - $\lambda=\lambda_1\cos^2\phi+\lambda_2\sin^2\phi$ (1.26)



- Bu eşitlik çizgisel boy değişimini deformasyondan önceki x-ekseni ile yapılan ϕ açısına göre belirlemektedir. Kayaçlarda pratik deformasyon ölçümlerinde ise genellikle ϕ‘ ile ifade etmek daha kullanışlıdır. Yukarıdaki şekildeki dik üçgenden yararlanıldığında

$$\cos\phi = x = \frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{\lambda}\cos\phi}{\sqrt{\lambda_1}} ....\sin\Phi = \frac{\sqrt{\lambda}\sin\phi}{\sqrt{\lambda_1}}$$

- bunları $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ denklemine yerleştirirsek

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}\cos^2\phi + \frac{\lambda}{\lambda_2}\sin^2\phi = 1 ...\lambda'$$ nü dışarı alıp karşı tarafa yerleştirirsek

$$\lambda = 1/\lambda ....\lambda = 1/\lambda_1 ......\lambda_2 = 1/\lambda \; .....yi..de..kullanarak$$

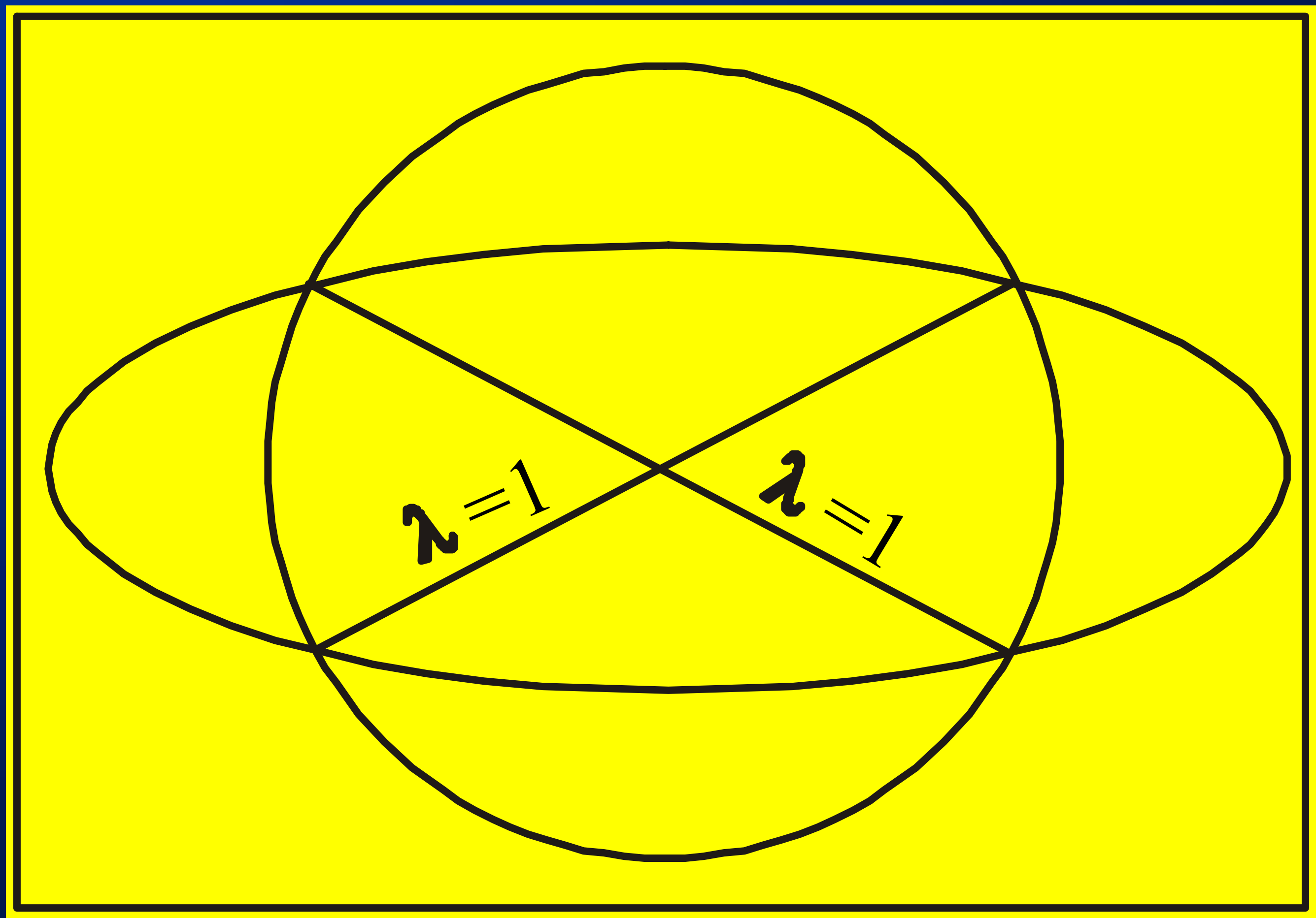
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sin^2\phi}{\lambda_2} + \frac{\cos^2\phi}{\lambda_1}$$

$$\lambda = \lambda_1\cos^2\phi + \lambda_2\sin^2\phi .(1.27).....elde..edilir.$$

- Bunu Mohr diyagramına uygulamak için denklemleri 2ϕ‘ açısı ile ifade edersek

$$\lambda' = \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{2} - \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\cos 2\phi'$$

1.5.1 Uzamasız doğruların konumu



- Deformasyon genellikle λ_1, λ_2 ve ϕ' değerlerine bağlı olarak bir cisim içindeki doğrularda uzama veya kısalmaya yol açar. Bazı deformasyonlarda deformasyon elipsi içinde öyle iki yön vardır ki, bu yönlerdeki doğruların uzunlukları değişmez. Bunlara uzamasız doğrular (no finite longitudinal strain) denir. Uzamasız doğrularda $\lambda=\lambda'=1$ (Şekil 1.13) olacaktır. Bunu (1.26) ve (1.27) denklemlere yerleştirip ϕ ve ϕ' için sırasıyla çözersek

$$\tan^2\phi = \frac{\lambda_1 - 1}{1-\lambda_2} \text{..............................} \tan^2\phi' = \frac{\lambda_2(\lambda_1 - 1)}{\lambda_1(1-\lambda_2)}$$

$$\tan^2\phi' = \frac{1-\lambda'_1}{\lambda'_2 - 1}$$

Uzamasız doğrularındeformasyondan önceki denklemi (1.28)

Uzamasız doğrularındeformasyondan sonraki denklemi (1.28)

- Deformasyondan sonra $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ koşulunu sağlayacak şekilde bazı yönlerdeki doğrular uzayacak bazıları da kısalacaktır.
- $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$ veya $1 > \lambda_1 > \lambda_2$ ise
- doğruların tümü uzayıp veya kısalacağından bu eşitliklere çözüm yoktur.

1.5.2. Açılardaki değişim

- Asal deformasyon eksenleri alan değişimi (Δ_A) ve asal eksenlerin oranı (R) ile ifade edilebilir.

- $\lambda 1 = R(1+ \Delta_A)$ $\lambda 2 = (1+ \Delta_A)/R$

- Şekil 1.12' den görülebileceği gibi deformasyon sonucu ϕ açısı ϕ' açısına dönüşür.

- $\tan \phi ' = y_1 / x_1$ veya $\tan \phi' = y \lambda_2^{1/2} / x \lambda_1^{1/2}$
- $y/x = \tan \phi$ olduğundan ϕ ve ϕ' açıları arasındaki ilişki

- $\tan\phi ' = \tan\phi / R = \tan\phi$ (1.29) şeklinde ifade edilebilir. (Wettstein eşitliği)

1.6. Kayma deformasyonu

- Bu bölümün amacı defomasyon elipsi üzerinde herhangibir noktada γ-kayma deformasyonunun hesaplanmasıdır. Eğer P(x,y) ($x^2+y^2=1$ ile verilen daire üzerinde) noktası
- $x_1^2/\lambda_1 + y_1^2/\lambda_2 = 1$ denklemi ile verilen deformasyon elipsi üzerinde $P_1(x_1,y_1)$ noktasına yer değiştirirse, bu noktada elipse tanjant eşitlik

$$\frac{xx_1}{l_1}+\frac{yy_1}{l_2}=1 \text{.........} \text{...}veya \text{......} x_1 = x(1+e_1) = \cos q\sqrt{l_1} \text{..........} .y_1 = \sin q\sqrt{l_2} \text{....}$$ kullanılarak

$$\frac{x\cos q}{\sqrt{l_1}}+\frac{y\sin q}{\sqrt{l_2}}=1$$

Bu doğruya orijinde dik g doğrultusunun uzunluğu

$$P=\left(\frac{1}{\cos^2 q/l_1+\sin^2 q/l_2}\right)^{1/2}$$

$$\sec\psi=\frac{\sqrt{\lambda}}{P}=\left[\lambda\frac{\cos^2\theta}{\lambda_1}+\frac{\sin^2\theta}{\lambda_2}\right]^{1/2}$$

$$\gamma^2 = \tan^2\psi = \sec^2\psi - 1 = \lambda\left(\frac{\cos^2\theta}{\lambda_1} + \frac{\sin^2\theta}{\lambda_2}\right) - 1$$

$\lambda = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta$ Formülü ile yer değiştirirsek ve

γ için $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = 1$

Formülünü kullanarak

$$\gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} \cos\theta \sin\theta \ldots veya \ldots\ldots\ldots \gamma = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2\right)^{1/2} \cos\theta \sin\theta \ldots\ldots (1.30)$$

formül kayma deformasyonunu deforme olmamış konumdaki θ açısına göre tanımlamaktadır. Buna göre kayma deformasyonu sadece asal deformasyon eksenlerinin oranına bağlıdır. Eğer

$$\cos\theta = x\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{\lambda}\cos\theta}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\lambda}\sin\theta}{\sqrt{\lambda_2}}$$

Bunları yukarıdaki formüllerde yerine yerleştirirsek

$$\gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \frac{\sqrt{\lambda}\cos\theta}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{\sqrt{\lambda}\sin\theta}{\sqrt{\lambda_2}} \ldots burada$$

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\sin\theta\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \gamma' = \frac{\gamma}{\lambda} \ldots\ldots ise \ldots buradan$$

$$\gamma' = (\lambda'_2 - \lambda'_1)\sin\theta'\cos\theta' \quad (1.31)$$

Bu formül de deformasyondan sonraki Duruma göre kayma deformasyonunu verecektir

1.6.1. Kayma deformasyonunun maksimum değerinin bulunması

$$\gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \sin\theta\cos\theta \ldots formülünün \ldots \theta' \, ya..göre..diferansiyelini..alýrsak$$

$$\frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \cos 2\theta \ldots\ldots\ldots bu..ifadenin..maksimum..deðeri\ldots\ldots \frac{d\gamma}{d\lambda} = 0 \ldots olduðu..konumdadýr.$$

$$Buna \ldots göre \ldots \cos 2\theta = 0 \ldots veya \ldots \theta = 45 \ldots\ldots veya \ldots\ldots \theta = 135 \ldots olacaktýr.$$

$$\tan\theta' = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y\sqrt{\lambda_2}}{x\sqrt{\lambda_1}} = \tan\theta\sqrt{\lambda_2 / \lambda_1}$$

Formülünü kullanarak deformasyondan sonra maksimum kayma deformasyonunun olduğu Doğruların konumu

$$\tan\theta' = \sqrt{\lambda_2 / \lambda_1}$$

Deformasyon elipsi eksenlerinin son yönelimi ile başlangıçta 45^o lik açı yapan ve açısını da deformasyondan sonra yapan doğrular maksimum kayma deformasyonunu yaparlar. Bu deformasyonun değeri θ=45^o veya θ=135^o değerlerini

$$\gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \sin\theta\cos\theta$$

Formülüne yerleştilerek bulunur. Buna göre

$$\gamma_{\max} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}} = 1/2(R - 2 + 1/R) \ldots.(1.32)$$

$$\gamma_{\min} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}} = 1/2(2 - R - 1/R) \ldots..(1.33)$$

MOHR DAİRESİ (DİYAGRAMI)

- Gerilme ve deformasyon bileşenlerinin grafiksel değişimi ile ilişkili oldukça pratik bir metot Alman mühendisi Otto Mohr (1882) tarafından ortaya konmuştur. Mohr dairesini kurmak için

$$\lambda = \lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi .(1.27)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \sin\phi \cos\phi$$

$$\lambda' = \lambda'_1 \cos^2 \phi' + \lambda'_2 \sin^2 \phi'$$

$$\gamma' = (\lambda'_2 - \lambda'_1) \sin\phi' \cos\phi'$$

Eşitliklerini çift açı yapacak şekilde düzenlersek

(cosϕ=(1+cos2ϕ)/2; sin ϕ=(1-cos2ϕ)/2; sinϕ cosϕ=(sin2ϕ)/2)

- Deforme olmamış duruma göre

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda - \lambda_2}{2}\cos 2\phi$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\cos 2\phi$$

- Deforme olmuş duruma göre

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\cos 2\phi ...(1.34)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\sin 2\phi .....(1.35)$$

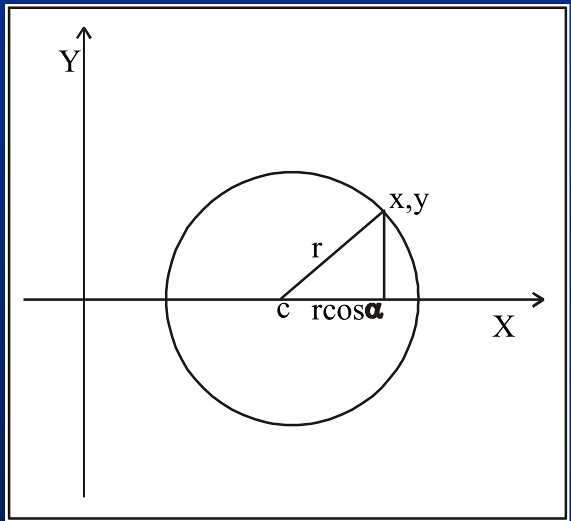
- olur

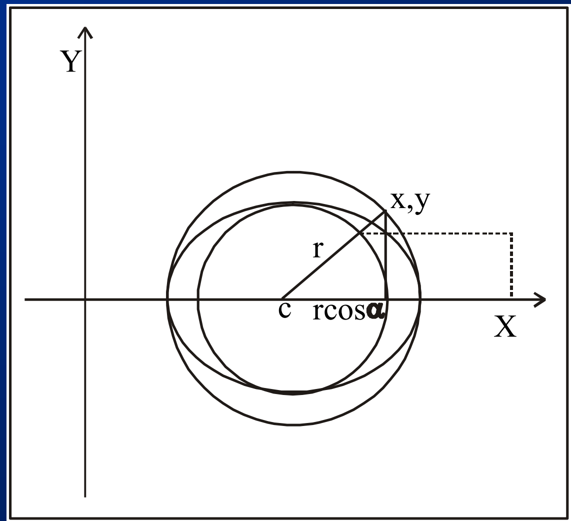
Merkezi (c,0) ve asal eksenleri 2r ve 2r' olan herhangibir daire denklemi (Şekil 1.14)

$x=c+r\cos\alpha \qquad y=r\sin\alpha$

ve diğer şekilde (Şekil 1.15) merksezi (c,0) ve asal eksenleri 2r ve 2r' olan elipsin denklemi

$x=c+r\cos\alpha \qquad y=r'\sin\alpha$ dır.





Deforme olmamış duruma göre ifade edilirse

$x=\lambda \qquad y=\gamma$

$$r=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\,........\,r'=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$$

$$c=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\,.........\,\alpha=2\phi$$

Buna göre çizgisel boy değişimi ve kayma deformasyonu, boy değişiminin asal eksenleri ile ϕ açısı yapan herhangibir çizgi boyunca elips üzerinde bir nokta ile ifade edilebilir.

$\lambda_1\ \lambda_2=1$ ise alan değişimi yoktur ve r=r' olur.

Bu durumda deformasyon daire üzerinde bir nokta ile gösterilir.

Deforme olmuş duruma göre ise , alan değişimi gözönüne alınmazsa

$$x = \lambda' \ldots\ldots\ldots y = \gamma'$$

$$c = \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{2} \ldots (1.36) \ldots\ldots r = \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2} \ldots (1.37) \ldots\ldots \alpha = 2\phi'$$

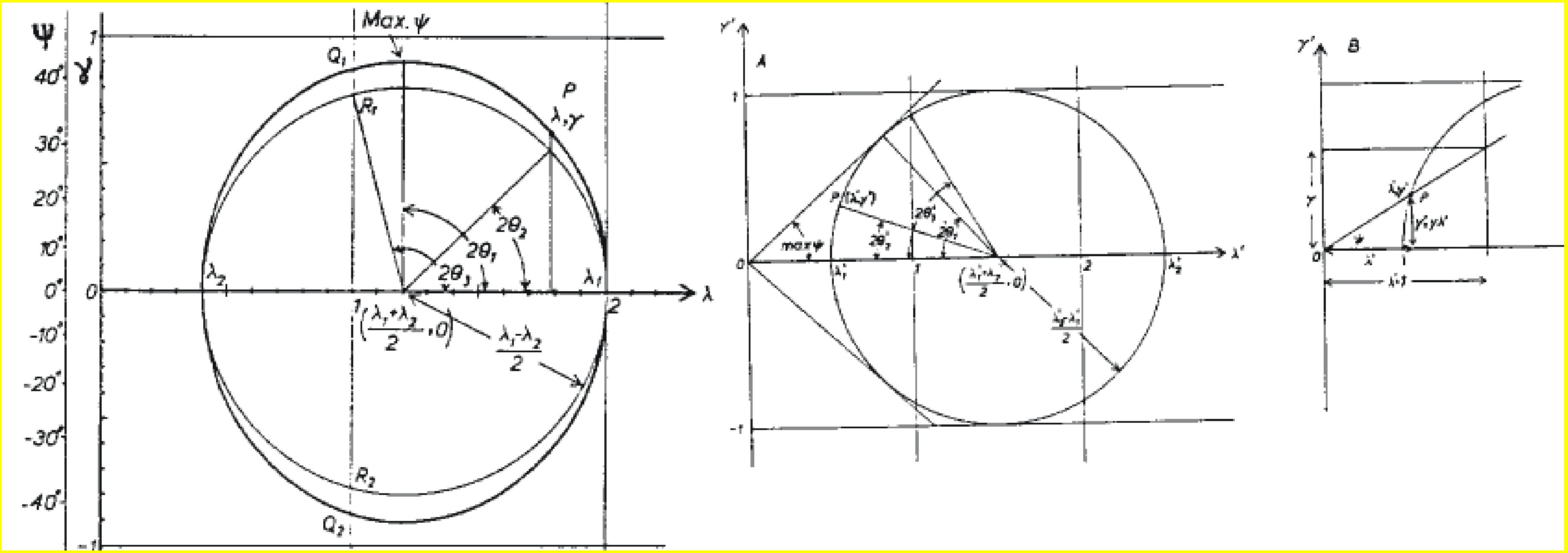
yazılabilir.
Mohr dairesi ile λ ve γ değerleri numerik hesaplama yapılmadan bulunabilir.

1.7.1. Deforme ve deforme olmamış duruma göre Mohr dairesinin çizimi

- Herhangibir deformasyon için iki Mohr dairesi çizilebilir. Deforme olmuş şartlara göre, deformasyon durumunun belirlendiği Mohr diyagramı daima bir dairedir. Pratik jeolojik çözümler için deforme olmamış durumda çizilecek diyagramdan daha çabuk ve daha kolay çizilir.

1.7.2. Deforme olmamış duruma göre Mohr dairesinin çizimi

- Bir daireyi asal eksenleri λ_1 =2.0 ve λ_2 =0.4 olacak şekilde deforme edelim.
- 1- Apsisi λ, ordinatı γ'yı gösterecek şekilde dik iki koordinat sistemi çizilir(Şekil 1.16).
- 2- Merkezi $\lambda_1 + \lambda_2$ /2 (örnekte; 2.0+0.4/2=1.2), yarıçapı (λ_1 - λ_2)/2 (2.0-0.4/2=0.8) olacak daireyi çizelim. Bu daire λ-eksenini λ_1 =2.0 ve λ_2 =0.4 noktalarında kesecektir.
- 3- (λ_1 λ_2)1/2 =0.894 olduğundan bu deformasyonda alan değişimi vardır ve deformasyondaki değişim bir elipsle ifade edilebilir. Bu durumda bütün ordinatlar 1/(λ_1 λ_2) değeri, yani 1.12 faktörü ile değiştirilmelidir. γ ve λ değerleri yukarıdaki değerleri (deforme durumdaki) doğrular.



1.7.3. Mohr diyagramından deformasyon elipsinin özelliklerinin belirlenmesi

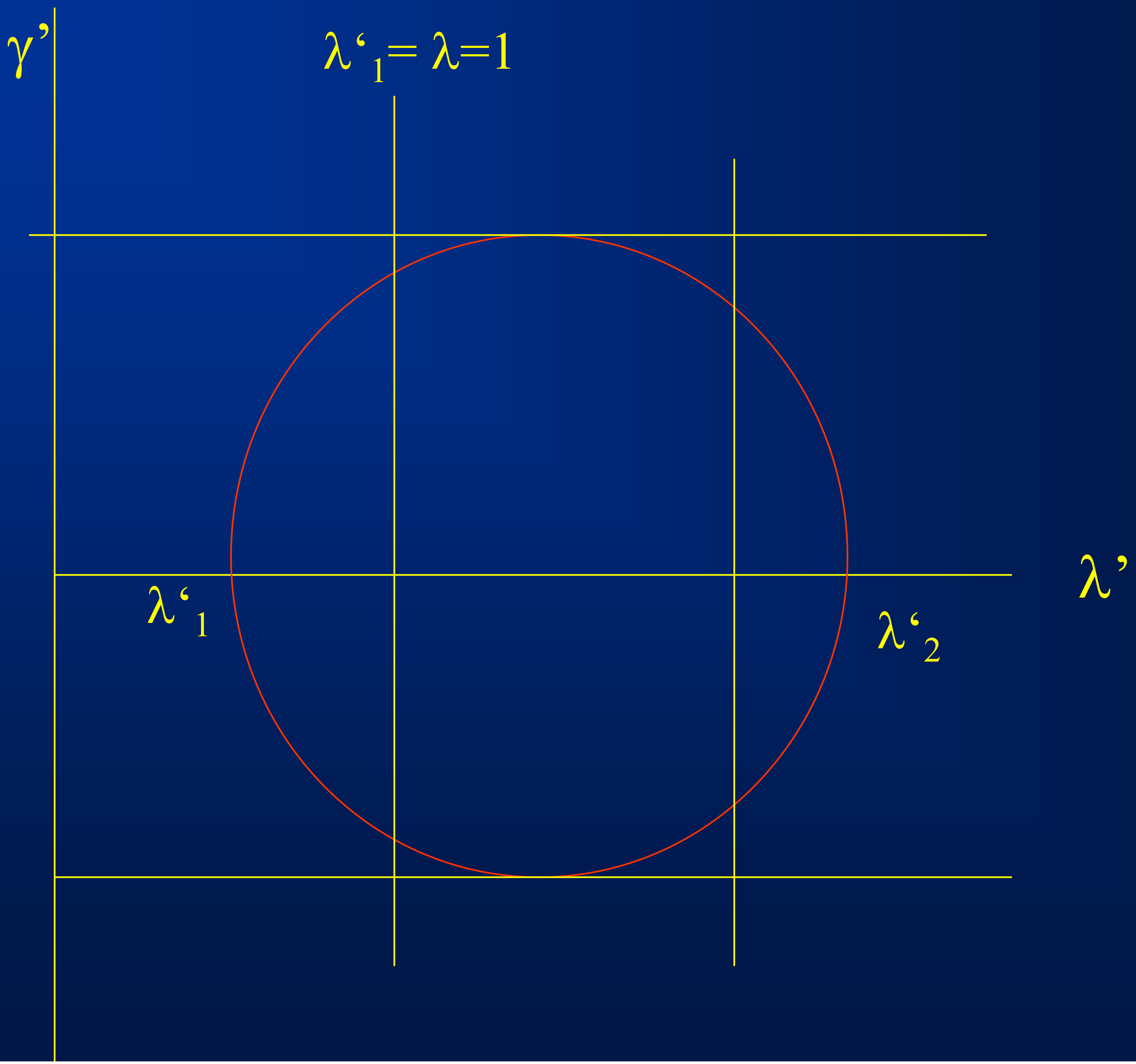
- Eğer ϕ asal deformasyon elipsinin ekseni ile (x-ekseni) herhangibir doğru arasındaki açı ise, γ_{max} $2\phi=90^o$ veya 270^o olduğu yani $\phi_1=45^o$ veya 135^o olduğu durumdadır. Bu noktada $\gamma=\pm0.89$ $\Psi=\pm42^o$ olur. Bu da $\gamma_{max}=\pm\ \lambda_1-\lambda_2/2(\lambda_1\lambda_2)1/2$ nin grafiksel çözümünü verir. (-) işaretli (+) yönündeki kaymanın zıt yönlüsüdür. Yine diyagramdan görülebileceği gibi kayma deformasyonu (γ), $2\phi=0^o$ veya 180^o olduğu durumda, diğer bir deyişle deformasyon elipsinin asal eksenleri boyunca 0'a eşittir.

- Deformasyondan önce x-ekseni ile herhangibir açı yapan (örn., 22^o) bir doğrultuda deformasyonları bulmak için merkezden λ_1'e doğru $2\phi=44^o$ lik bir yarıçap çizgisi çizilir. Bu noktadan γ-eksenine parallel bir çizgi çizilip Mohr elipsinin P noktası bulunur. P noktasının apsisi ve ordinatı λ ve γ değerlerini verir (Örnekte $\lambda=1.78$, $\gamma=0.63$).

- Deformasyondan önce boy değişiminin olmadığı çizgilerin konumunu bulmak için $\lambda=1$ şartını sağlayan Q_1 ve Q_2 noktaları bulunur. Buradan daire üzerinde R_1 ve R_2 noktaları bulunup merkezle birleştirildiğinde 2ϕ açısı bulunmuş olur. Bu örnekte açılar 52^o ve 128^o dir.

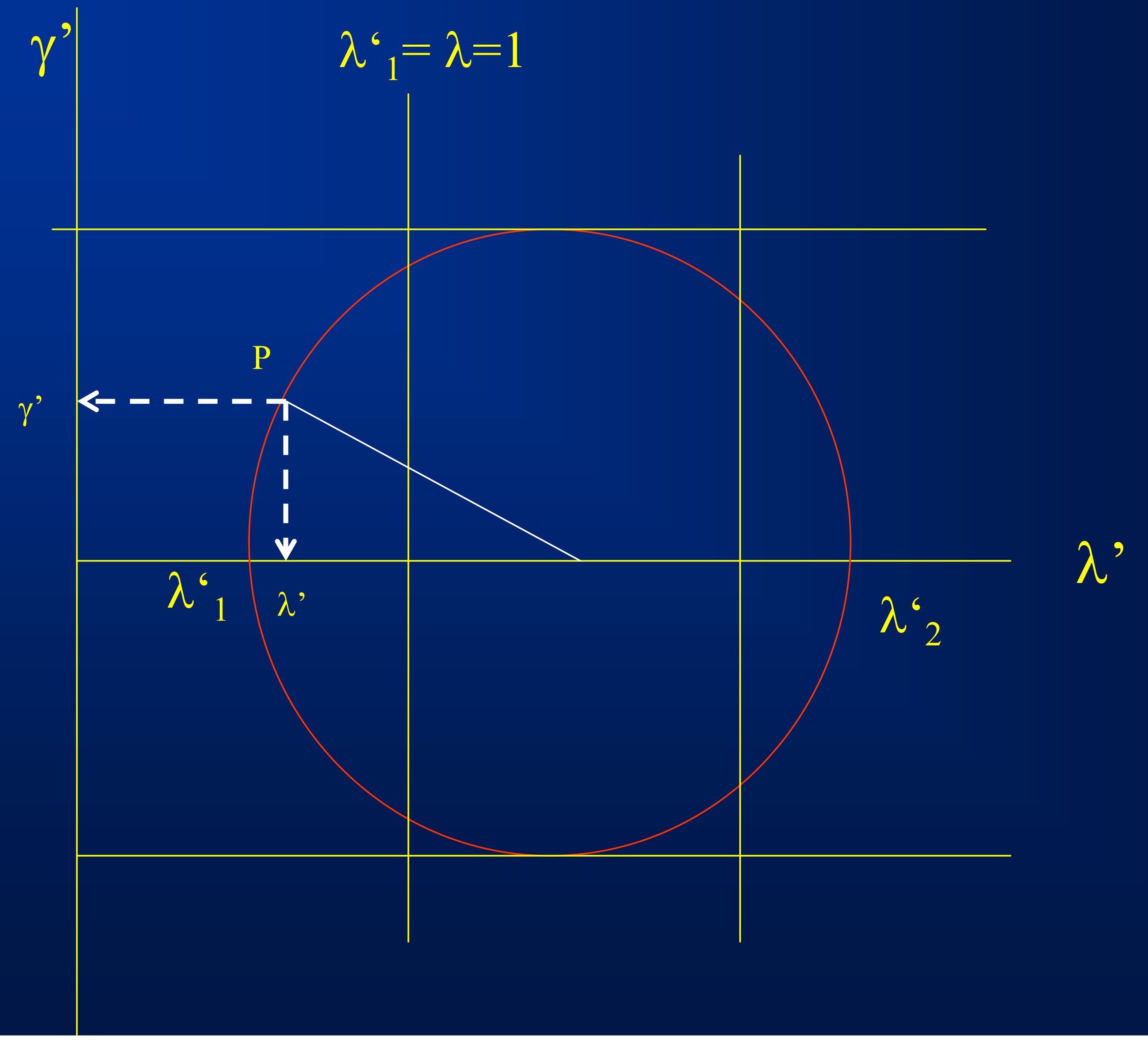
1.7.4. Deforme olmuş duruma göre Mohr dairesinin çizilmesi

- 1- $\lambda'_1(1/\lambda_1=1/2=0,5)$ $\lambda'_2(1/\lambda_2=1/0.4=2.5)$ değerleri bulunur.
- 2- apsisi λ' ve ordinatı γ' olan dik koordinat sistemi çizilir.
- 3- merkezi $(\lambda'_1+\lambda'_2/2= \quad 0.5+2.5/2=1.5)$ ve
- yarıçapı $(\lambda'_2-\lambda'_1/2= \quad 2.5-0.5/2=1)$
- olan daire çizilir (Şekil 1.16b).

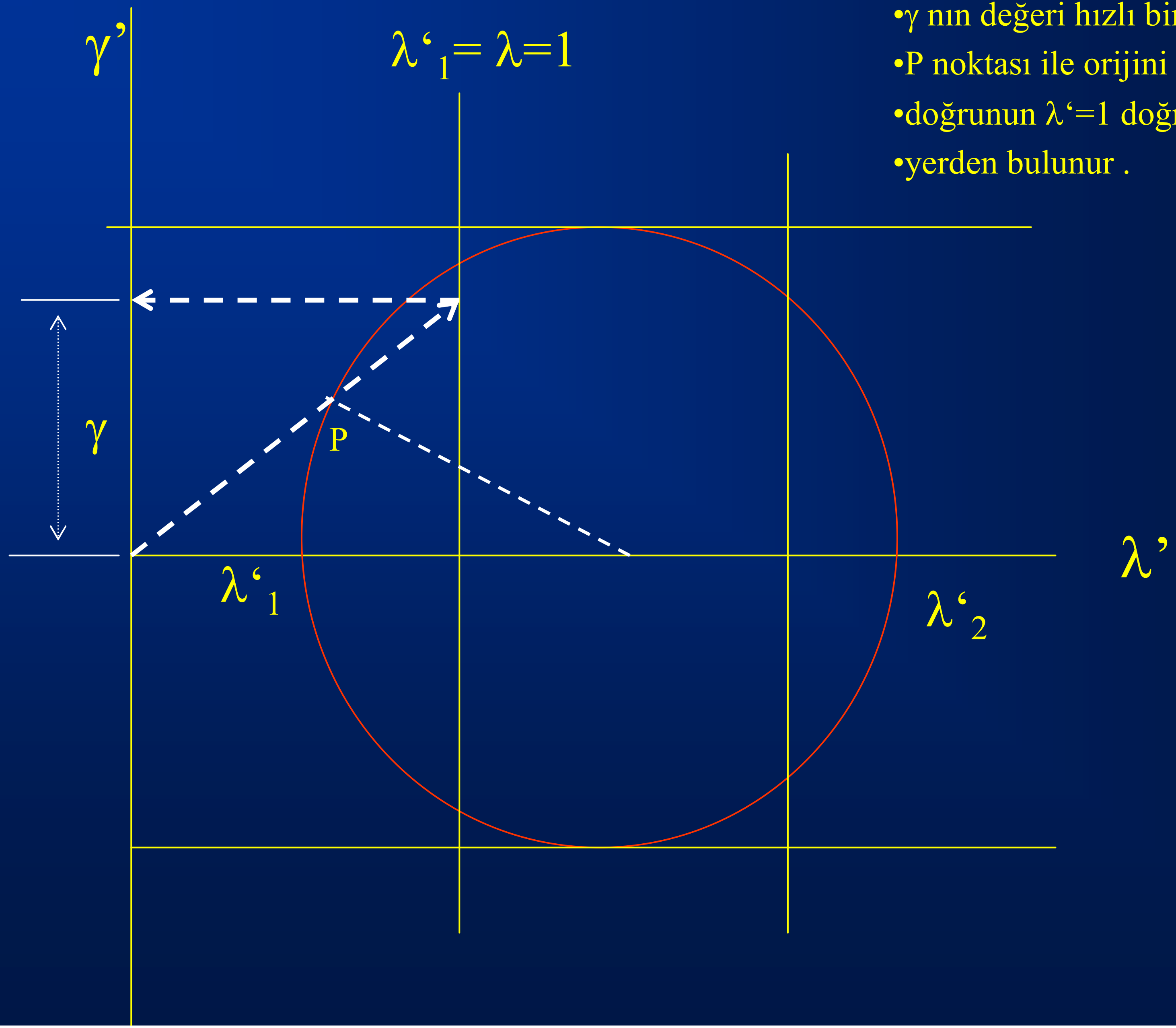

γ’
λ‘1= λ=1
λ’
λ‘1
λ‘2

1.7.5. Mohr dairesinden deformasyon elipsinin özelliklerinin bulunması

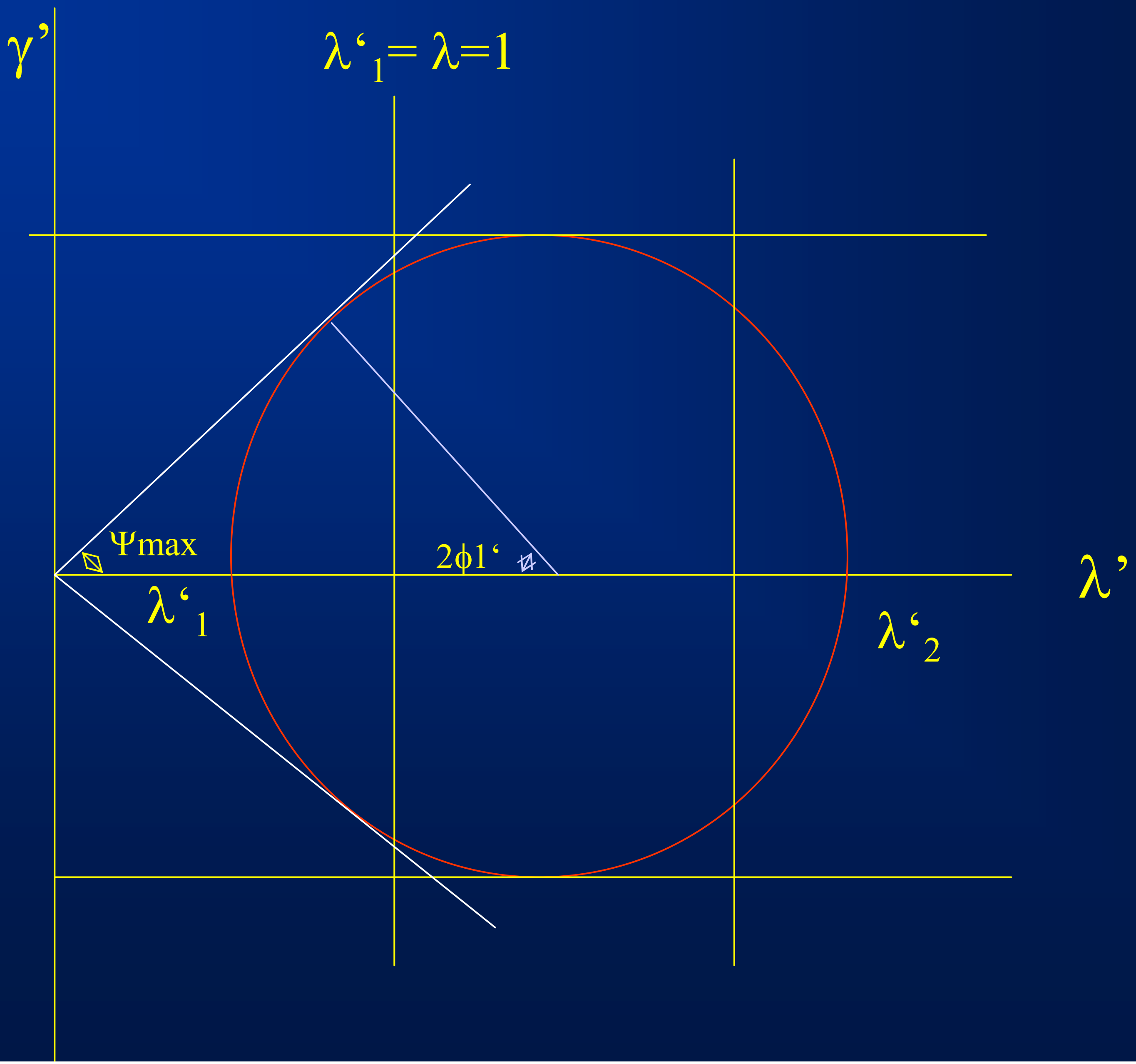
- x-ekseni ile herhangibir ϕ‘ açısı yapan bir doğrunun Mohr dairesini kestiği P noktasındaki γ‘ ve λ‘ değerleri.
- $$\lambda' = \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{2} - \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\cos 2\phi' \ldots (1.34)$$ $$\gamma' = \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\sin 2\phi' \ldots\ldots (1.35)$$
- değerlerini karşılar
- Deforme durumdaki Mohr diyagramından λ‘-eksenine göre λ‘ ve γ‘ konumu farklı olduğundan 2ϕ‘acısı değişik bir yolla bulunur (Şekil 1.16b).
- γ‘= γ/λ olduğundan γ= γ‘/λ‘ dür.
- P(γ‘,λ‘) noktasına orijinden çizilen teğet Ψ açısını verecektir.


γ'
λ'1 = λ=1
P
γ'
λ'1
λ'
λ'2
λ'

- γ nın değeri hızlı bir şekilde
- P noktası ile orijini birleştiren
- doğrunun λ‘=1 doğrusunu kestiği
- yerden bulunur .

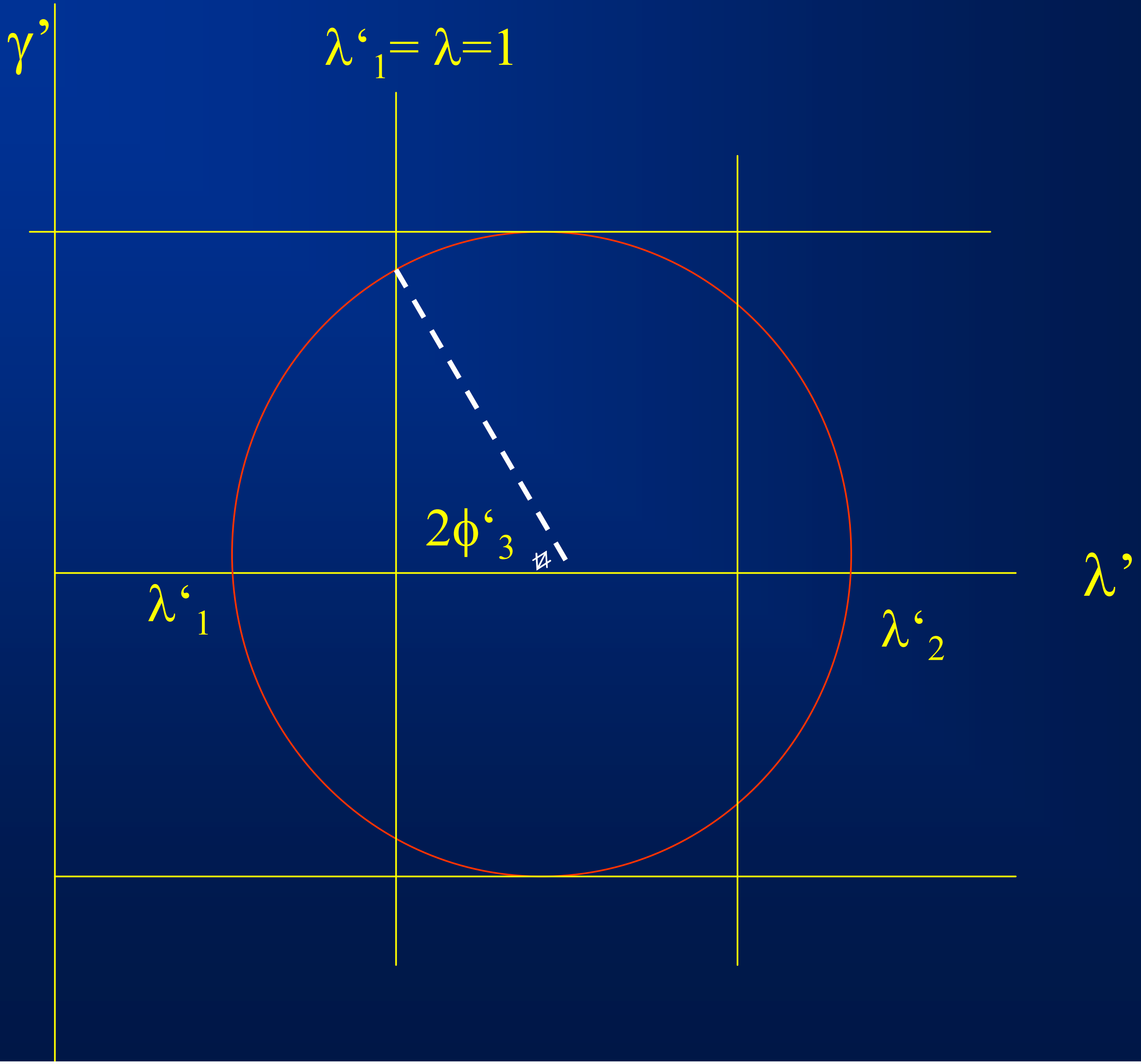


- γ nın maksimuma ulaştığı değerleri bulmak için
- Mohr dairesine orijinden çizilecek teğetler kurulur ve
- bu teğetler c (merkez) ile birleştirilir.
- Bu da $2\phi_1' = \pm 48^o$ olarak bulunur.
- Maksimum kayma deformasyonunun olduğu doğrular ile elipsin x-ekseni arasındaki açı $\phi_1' = \pm 24^o$ ve bu yönde $\Psi max = \pm 42^o$ dir.


γ'
λ'1= λ=1
Ψmax
2ϕ1'
λ'1
λ'
λ'2

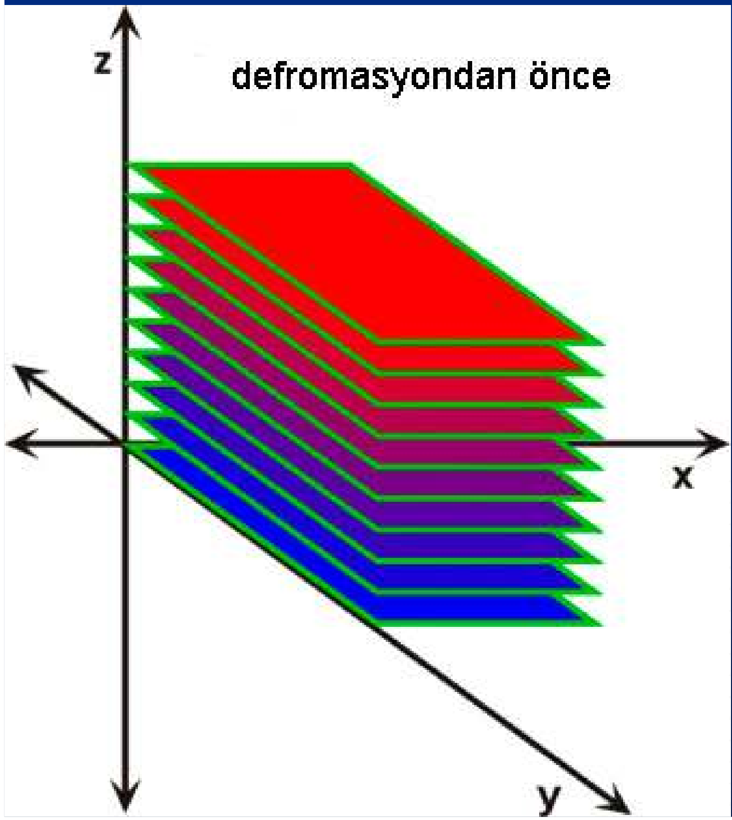
- Asal deformasyon ekseniyle ϕ'2=9.5^o açı yapan bir yönde deformasyon durumunun belirlenmesi için Mohr dairesinin merkezinden 2ϕ'_2=19^o açısı alınıp (λ' ekseninden) P noktası bulunur. P noktasının apsis ve ordinatı γ' ve λ' değerlerini verir.

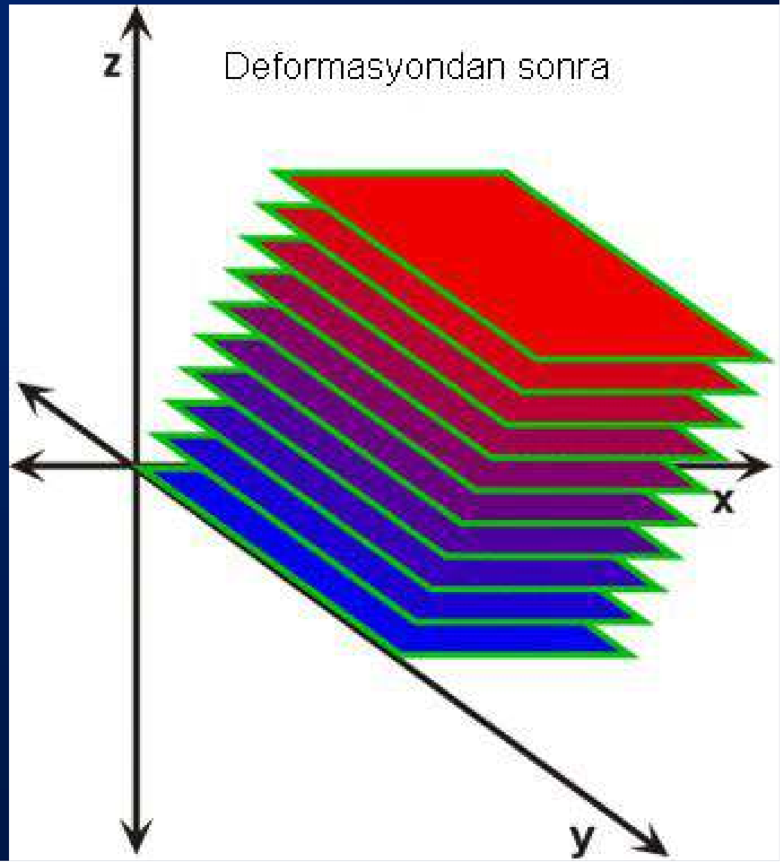
- Uzamanın olmadığı doğruların konumunu bulmak için λ'=1 doğrusu çizilerek bunun Mohr dairesini kestiği noktalar belirlenir ve burada 2ϕ'_3 açısı bulunur. Örnekte 2ϕ'_3= ±30^o dir


γ'
λ'₁= λ=1
2φ'₃
λ'₁
λ'₂
λ'

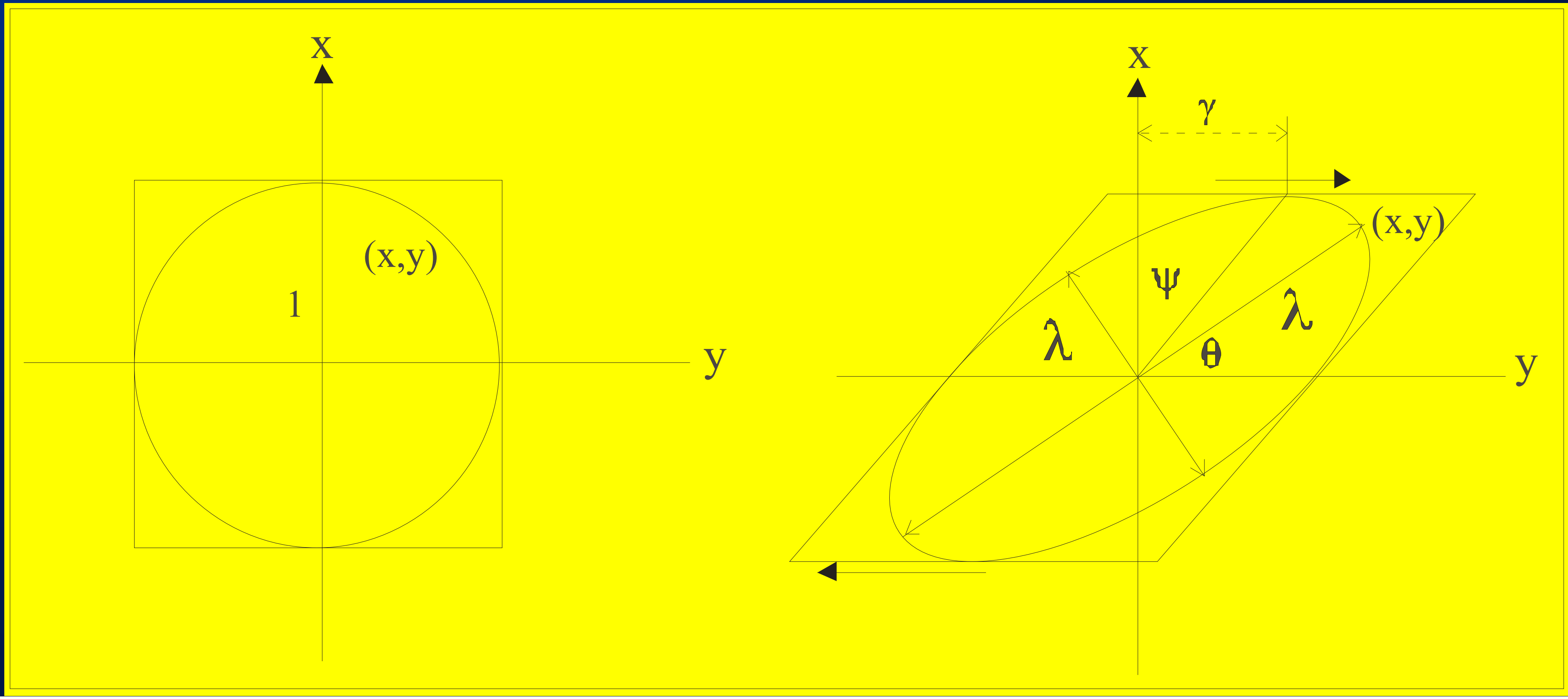
1.8. Basit kayma

- Dönmeli deformasyonun özel bir türü de, kayaçların birbirine parallel süreksiz düzlemler boyunca makaslama hareketleri yapmasıdır (Şekil 1.17). Buna basit kayma deformasyonu (simple shear) adı verilir. Deformasyon elipsinin asal eksenlerinin yönelimi kayma miktarına bağlıdır.





Bir birim daire ($x^2+y^2=1$ ile verilen) üzerinde (x,y) noktası alındığında, bu nokta deformasyondan sonra (x_1,y_1) konumuna gelecektir .



- $y_1=y$ $x_1=x+\gamma y$ veya $x=x_1-\gamma y$ olur.
- $x^2+y^2=1$ denkleminde x ve y' yi yer değiştirerek deformasyon elipsi denklemi kurulabilir.
- $(x_1-\gamma y_1)^2+y_1^2=1$ bunu açarsak $x_1^2-2\gamma x_1 y_1+(1+\gamma^2)y_1=1$ elde edilir.
- Deformasyon elipsinin asal eksenlerini bulmak için, koordinat geometrisinin normal tekniği ile devam eder ve $x^2+y^2=r^2$ dairesinde r yarıçapının elipse dokunduğu noktayı buluruz. Bu şart altında yarıçap elipsin asal eksenlerinden birine karşılık gelecektir. $x^2+y^2=r^2$ dairesi elipsi bir çift doğru boyunca kesecek ve yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1.....elde..edilecektir.$$

$$x^2\left(1-1/r^2\right)-2\gamma xy+y^2(1+\gamma^2-1/r^2)=0$$

- Eğer bu durumda daire elipse dokunuyorsa, bir çift doğru uyuşacaktır. Eğer denklem uyumlu doğruları belirliyorsa
- (ax-by) (ax-by)=0 yani
- $a^2 x^2 - 2abxy + b^2 y^2 = 0$ buradan da
- x ve y terimlerinin katsayıları xy teriminin katsayısının yarısının karesine eşit olacaktır
- $(1-1/r^2)(1+\gamma^2-1/r^2)=\gamma 2$
- bunu r için çözersek $r^4 - r^2(\gamma^2+2)+1=0$ elde edilir. veya
- $r^2=\lambda_1$ veya $\lambda_2= \gamma^2+2\pm\gamma(\gamma^2+4)^{1/2} /2$ (1.38)
- Bu denklem iki asal deformasyon eksenlerini verecektir.

Kayma düzlemi ve asal eksen arasındaki ϕ açısının bulunması

- Bu durumda birbiriyle uyumlu doğruların eğimini bulmalıyız

$$x^2\left(1-1/r^2\right)-2\gamma xy+y^2\left(1+\gamma^2-1/r^2\right)=0......bu..denklemi$$

$(1+\gamma^2-1/\lambda_1)$ ile çarpar ve r^2, λ_1 ile yer değiştirirse

$$x^2(1-1/\lambda_1)\left(1+\gamma^2-1/\lambda_1\right)-2\gamma(1+\gamma^2-1/\lambda_1)xy+y^2\left(1+\gamma^2-1/\lambda_1\right)^2=0....olur.$$

- ve $(1-1/r^2)\ (1+\gamma^2-1/r^2)=\gamma^2$ şartını kullanarak

$$x^2\gamma^2-2\gamma(1+\gamma^2-1/\lambda_1)xy+y^2(1+\gamma^2-1/\lambda_1)^2=0...bu.da$$

$\left[\gamma x-(1+\gamma^2-1/\lambda_1)y\right]^2=0$ ‘ın karesidir

- Bu uyumlu doğruların eğimi ϕ yi verir.
-
- $$\tan\phi=\frac{\gamma}{1+\gamma^2-1/\lambda_1}$$ **olur. (1.39)**